Διάλεξη 13η

22/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$(E_0): \; a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$

$(C): \; y(x_0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$

Ασκ. 4 σελ 83)

$$y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0$$

Να βρεθούν λύσεις $: e^{cx}$.

Λύση

$$c^3 e^{cx} - 6c^2 e^{cx} + 5c e^{cx} + 12 e^{cx} = 0 \Rightarrow$$

$$c^3 - 6c^2 + 5c + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(c+1)}_{-1}\underbrace{(c^2 - 7c + 12)}_{3,\ 4} = 0$$

Έτσι $y_1(x) = e^{-x}$

$y_2(x) = e^{3x}$ → γρ. ανεξ.

$y_3(x) = e^{4x}$

$B.\sigma.\lambda. = \{e^{-x}, e^{3x}, e^{4x}\}$

Άρα $\quad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{4x}, \; x \in \mathbb{R}$

Ασκ. 5)

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \quad x > -1/2$$

$y(x) = e^{cx}, \; x > -1/2$ $\quad (2x+1)c^2 e^{cx} - 4(x+1)c e^{cx} + 4e^{cx} = 0$

$y(x) = ax + B, \; x > -1/2$ $\quad (2x+1)c^2 - 4(x+1)c + 4 = 0$

$\underline{x=0}$: $\quad c^2 - 4c + 4 = 0$, $\boxed{c=2}$

(*) πρέπει τώρα να πιστοποιήσω ότι το $e^{2x} = y_1(x)$ είναι όντως λύση//

Άρα για $c=2$ και για $x=0$ θα πρέπει να δω για $y = e^{2x}$ είναι όντως λύση

Προφανώς για $y=e^{2x}$, έχει για $x>-1/2$

$(2x+1)4e^{2x}-4(x+1)2e^{2x}+4e^{2x} = 8x+4-8x-8+4=0$

$\rightsquigarrow y_1(x)=e^{2x}$, $x>-1/2$

Τώρα:

$$-4(x+1)a-4(ax+b)=0,\ x>-1/2$$

$x=0$: $-4a-4b=0 \Rightarrow a=-b$

$x=1$: . . . (βάζω μια άλλη εξ.) και βρίσκω τα a,b.

<u>ΟΜΩΣ</u>, αφού βρω τα (a,b), θα πρέπει να βεβαιωθώ ότι αυτά τα a,b είναι λύσεις $\forall x>-1/2$

Αφού βρω τα $y_1(x)$, $y_2(x)$ θα πρέπει να δω ότι είναι <u>γρ. ανεξάρτητες</u>

<u>Θεώρημα</u>: (Υποβιβασμός τάξης) (σελ 74)

(Ε0): $a_n y^{(n)}+\ldots+a_1y'+a_0y=0$, $x\in I$

Ας είναι $x_0\in I$, και y_1 μια λύση της (Ε0) με $y_1(x)\neq 0$, $x\in I$

Για $y=uy_1$, $v=u'$, η (Ε0) μετασχηματίζεται σε μια γραμμική ομογενή δ. εξίσωση $(n-1)$ τάξης : $(E0)^*$.

Αν $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ είναι ένα Θ.Σ.Λ. της $(E0)^*$ και:

$$y_i(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x} v_{i-1}(s)ds,\ x\in I \quad (i=2,\ldots,n)$$

τότε το σύνολο $\{y_1,\ldots,y_n\}$ είναι ένα Θ.Σ.Λ. της (Ε0)

<u>Απόδ</u>

Για $x\in I$ έχουμε: $y=uy_1$ (a_0)

$y'=uy_1'+y_1u'$ (a_1)

$y''=uy_1''+2u'y_1'+y_1u''$ (a_2)

$\vdots$

$y^{(n-1)}=uy_1^{(n-1)}+\binom{n-1}{1}u'y^{(n-1)}+\ldots+y_1u^{(n-1)}$ (a_{n-1})

(a_n): $y^{(n)} = u y_1^{(n)} + \binom{n}{1} u' y_1^{(n-1)} + \dots + y_1 u^{n}$ $\quad u' = v$

$L(y) = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)}$

$= u\,[a_0 y_1 + a_1 y_1' + \dots + a_n y^{(n)}] + u' A_1 +$

$+ u'\,[a_1 y + a_2 2 y_1' + a_3 3 y_1'' + \dots + a_{n-1} n y^{(n-1)}] + \dots + a_n y_n u^{(n)} = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L(y) = 0}}$

$$\boxed{A_1 v + A_2 v' + \dots + A_n v^{(n-1)} = 0 \; : (E_0)^*.}$$

Τώρα για το 2ο μέρος της απόδειξης:
Ας είναι $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ και:

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \; x \in I$

Τότε για $x \in I$ έχω: $c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int_{x_0}^{x} v_1(s) ds + \dots +$

$+ c_n y_1(x) \int_{x_0}^{x} v_{n-1}(s) ds = 0 \Rightarrow$

$y_1(x)\left(c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} v_1(s) ds + \dots + c_n \int_{x_0}^{x} v_{n-1}(s) ds\right) = 0, \; x \in I$

$c_2 v_1(x) + \dots + c_n v_{n-1}(x) = 0, \; x \in I$

$\Rightarrow \; c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$

και συνεπώς $c_1 = 0$

Άρα οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γρ. ανεξ. λύσεις της (E_0).

Εφαρμογή: Αν y_1 είναι λύση της $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$. Να βρεθεί άλλη λύση της παραπάνω εξίσωσης η οποία θα είναι γρ. ανεξ.

Λύση

$y=uy_1$

$a_2(uy_1''+2u'y_1'+u''y_1)+a_1(uy_1'+u'y_1)+a_0uy_1=0$ και έστω

$u(a_2y_1''+a_1y_1'+a_0y_1)+u'(2a_2y_1'+a_1y_1)+a_2y_1u''=0$

$\underline{u'=v}$

Προκύπτει: $a_2y_1v'+(2a_2y_1'+a_1y_1)v=0$ (: Εξίσωση 1ης τάξης)

με λύση $v=c_0e^{-\int \dots ds}$

(*) Η εφαρμογή αυτή υπάρχει ως θεώρημα στο βιβλίο.

Άσκηση: $x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y$, $x>0$

$y_1(x)=x$

$y=xu$.

$x^3[u'''x+3u''\cdot 1]-4x^2[u''x+2u'1]+8x[u'x+u]-8ux=0$

$x^4u'''+3x^3u''-4x^3u''-8x^2u'+8x^2u'+8xu-8ux=0$

$u'=v$ $\quad x^4v''-x^3v'+x^2v=0$

$\rightsquigarrow x^2v''-xv'+v=0 \left\langle \begin{array}{l} v_1(x)=x \\ v_2(x)=x\log x \end{array}\right\}$ γραμ. ανεξ. λύση.

Β.Σ.Λ: $\{y_1(x)=x,\ y_2(x)=x\int_{x_0}^{x}s\,ds,\ y_3(x)=x\int_{x_0}^{x}\log s\,ds\}$

Παράδ. 7) (σελ 2.2 από σκαναρισμένες σημειώσεις, δες πιο πάνω ↑)

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0 \quad , \; x > -1/2$$

$y_1(x) = e^{cx}$ // $\underline{\underline{c=2}}$

$$y = e^{2x} u$$

$$(2x+1)\left[u''e^{2x} + 2u' 2e^{2x} + u4e^{2x}\right] - 4(x+1)\left[u'e^{2x} + 2ue^{2x}\right] + 4ue^{2x} = 0$$

$$(2x+1)u'' + u'\left(4(2x+1) - 4(x+1)\right) + u\left(4(2x+1) - 4(x+1)2 + 4\right) = 0$$

Αν $\underline{u' = v}$:

$$(2x+1)v' + (4xv) = 0$$

$$v(x) = c e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{4s}{2s+1} ds}$$

$\Uparrow$

Μπορώ να πάρω το c, όσο θέλω (σ' αυτή την περίπτωση)

για $c = 1$: $\int_1^x v(s)\,ds = -x-1$ //

Homework: Ασκ 7, 8 σελ 83.

Έχω: (Ε): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$, $x \in I$ (ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ)

(*) Αν έχω μια λύση της μη ομογενούς, τότε μπορώ να τις βρω όλες.

Βασικό σύνολο λύσεων έχουν μόνο οι ομογενείς δ. εξισώσεις. Όχι οι μη ομογενείς.

→ Αν y_1, y_2 λύση της (Ε) τότε η $y = y_1 - y_2$: λύση της ομογενούς ($a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, $x \in I$: (Εο))

<u>Θεώρημα 14, σελ 86</u>: Ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της (Εο) και $v_1, \dots, v_n$ λύσεις του συστήματος

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 + \dots + v_n' y_n = 0$$

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' + \dots + v_n' y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} = 0$$

$$v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} = b/a_n$$

Τότε (i) Μια μερική λύση της (Ε) είναι η

$$y = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_n y_n.$$

(ii) (Θεώρημα 15): Η συνάρτηση

$$y(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_1(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} ds + \dots + y_n \int_{x_0}^{x} \frac{W_n(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} ds$$

όπου $W_i(s)$ η ορίζουσα που προκύπτει απ' την ορίζουσα $W(x)$ με αντικατάσταση της στήλης-i από το $(0, 0, \dots, 0, \frac{b}{a_n})^T$ είναι μια μερική λύση της (Ε) που ικανοποιεί τις: $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x) = 0$

(i)

Αποδ.

Ας είναι ένα $y(x)=v_1(x)y_1(x)+\dots+v_n(x)y_n(x)$, $x\in I$ με $v_1',\dots,v_n'$ λύσεις του (S). Για $x\in I$, έχουμε

(a_0): $y=v_1y_1+\dots+v_ny_n$ (a_0)

(a_1): $y'=v_1'y_1+v_1y_1'+v_2'y_2+v_2y_2'+\dots+v_n'y_n+v_ny_n'=$

$=\cancel{(v_1'y_1+\dots+v_n'y_n)}^{\to 0}+(v_1y_1'+v_2y_2'+\dots+v_ny_n')$ (a_1)

$\Rightarrow (a_1)$ $y'=v_1y_1'+v_2y_2'+\dots+v_ny_n'$ (a_1)

Τώρα (a_2). $y''=\cancel{(v_1'y_1+v_2'y_2+\dots+v_n'y_n)}^{0}+(v_1y_1''+\dots+v_ny_n'')$ (a_2)

(a_{n-1}) $y^{(n-1)}=\cancel{(v_1'y_1^{(n-2)}+v_2'y_2^{(n-2)}+\dots+v_n'y_n^{(n-2)})}^{\to 0}+(v_1y_1^{(n-1)}+\dots+v_ny_n^{(n-1)})$ (a_{n-1})

$\vdots$

(a_n) $y^{(n)}=(v_1'y_1^{(n-1)}+\dots+v_n'y^{(n-1)})+(v_1y_1^{(n)}+\dots+v_ny_n^{(n)})$ (a_n)

$$L(y)=a_n\left(\frac{b}{a_n}\right)+v_1(a_0y_1+a_1y_1'+a_2y_1''+\dots+a_ny_1^{(n)})$$

$$+v_2(a_0y_2+\dots+a_ny_2^{(n)})+\dots+v_n(a_0y_n+\dots+a_ny_n^{(n)})=0$$

(ii) Παρατηρούμε ότι το (S) είναι ένα γρ. συστ. σύστημα $n\times n$ μη ομογενές ως προς $v_1',\dots,v_n'$ με ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0,\ \forall x\in I$$

Συνεπώς το (S) έχει μοναδική λύση την εξής

$$v_1'(x)=\frac{W_1(x)}{W(x)},\ \dots,\ v_n'(x)=\frac{W_1(x)}{W'(x)}$$

και

<u>Νοιι</u>

$$v_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W(s)}{W_i(s)}\, ds \quad , i = 1, \dots, n \quad \text{Είναι}$$

λύση της (S) με $v_1(x_0) = 0, \dots, v_n(x_0) = 0$.

<u>Παραδ. 3</u>: $y''' - y'' + y' - y = 1$.

y_p μερ. λύση, $y_p(0) = 0 = y_p'(0) = y_p''(0)$

(Εο): $y''' - y'' + y' - y = 0$

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 1 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}$$

$$= e^x \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x - \cos x & \cos x - \sin x \\ 0 & -2\cos x & -2\sin x \end{vmatrix} = (2\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\cos x \sin x) \cdot e^x$$

$$= 2e^x$$

$\Rightarrow W(x) = 2e^x$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \dots = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$W_2(x) = \dots = e^x(\sin x - \cos x)$

$W_3(x) = \dots = e^x(\sin x + \cos x)$

Έτσι η λύση που ψάχνω είναι η

$$y_p(x) = e^x \int_0^x \frac{1}{2e^s}\, ds + \cos x \int_0^x \frac{e^s(\sin s - \cos s)}{2e^s}\, ds + \sin x \int_0^x \frac{e^s(\sin s + \cos s)}{2e^s}\, ds$$

Παράδ 4)

$$x^2 y'' - x y' + y = x\log x$$

$$y_p(1) = y_p'(1) = 0$$

$y_1(x) = x$, $y_2(x) = x\log x$ 2 γρ. ανεξ. λύσεις της (Εο)

$$\hookrightarrow \quad W(x) = \begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x\log x \\ x\log x & \log x + 1 \end{vmatrix}$$

Υπολ. τότε: ......

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x\log x \end{vmatrix}$$

$\therefore$

$$\tilde{y} = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$